Prof. DI Dr. Erich Gams

Relationenalgebra

Grundlagen, Mengenlehre, Relation, Funktion

informationssysteme htl-wels

Übersicht ☛ Was lernen wir?

- Menge, Gleichheit, Teilmenge
- Durchschnitt, Vereinigung, Differenz
- Kartesisches Produkt
- Potenzmenge, Mächtigkeit, Disjunkte Mengen
- Relation und Funktion

Definition Menge

- Definition (Georg Cantor):
  - Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (m) unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente von M** genannt werden) zu einem Ganzen.

Definition Menge

- Jede Menge besteht aus **wohlunterschiedenen Objekten**, das bedeutet, dass in einer Menge nicht nur Zahlen enthalten sein müssen, sondern auch andere Objekte zulässig sind.
- Die Objekte, die in einer Menge enthalten sind, nennt man **Elemente der Menge**.
- Alle Elemente einer Menge müssen sich voneinander unterscheiden. Die Menge dient somit zur Klassifizierung und nicht zur numerischen Aufzählung.

Elemente

- "x ist ein Element der Menge A“

  $x \in A$

- "x ist **kein** Element der Menge B„

  $x \notin B$

Beschreibung von Mengen

- Mengen können durch die vollständige Aufzählung ihrer Elemente beschrieben werden.
- Beispiele für Mengen:

  M={rot;grün;blau}

  enthält die Elemente "rot", "grün" und "blau".
- "***M*** ist die Menge aller Elemente ***x***, für die gilt: ***x* ist kleiner als 3**".

$$M = \{x \mid x < 3\}.$$

Gleichheit

- Zwei Mengen ***M1*** und ***M2*** heißen dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Mehrfach vorkommende Elemente werden hierbei nur einmal gezählt.

$$M_1 = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

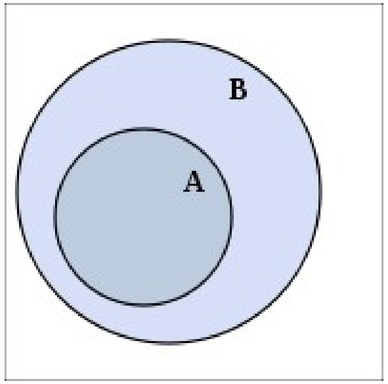
$$M_2 = \{b, a, c, e, d, g, f\}$$

$$M_1 = M_2$$

Teilmenge

- *A* ist eine Teilmenge von *B*
- Eine Menge *A* heißt Teilmenge einer Menge *B*, wenn jedes Element von *A* auch Element von *B* ist.
- *B* wird dann Obermenge (selten: Übermenge) von *A* genannt. Formal:

$$A \subseteq B :\Longleftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B).$$



Teilmenge

Die Menge M_1 ist eine **echte Teilmenge** der Menge M_2, wenn M_1 Teilmenge von M_2 ist und es mindestens ein Element e in M_2 gibt, das **nicht** in M_1 enthalten ist:

$$\mathbf{M_1 \subset M_2}$$

[Wenn $\mathbf{e \in M2}$ *(ein bestimmtes Element e ist in M_2 enthalten)* und $\mathbf{e \notin M1}$ ist *(das bestimmte Element e ist nicht in M_1 enthalten)*.]

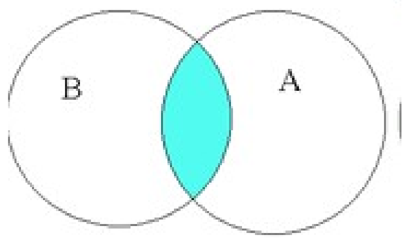
Beispiel:

Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist eine echte Teilmenge der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

Durchschnitt (Schnittmenge, Schnitt)

- Die Schnittmenge zweier Mengen *A* und *B* besteht aus allen Elementen, die in jeder der beiden Mengen enthalten sind (also sowohl in *A* als auch in *B*).

$$A \cap B$$



$$M_3 = M_1 \cap M_2 = \{m \in M_1 \mid m \in M_2\}$$
$$= m \in M_1 \wedge m \in M_2$$

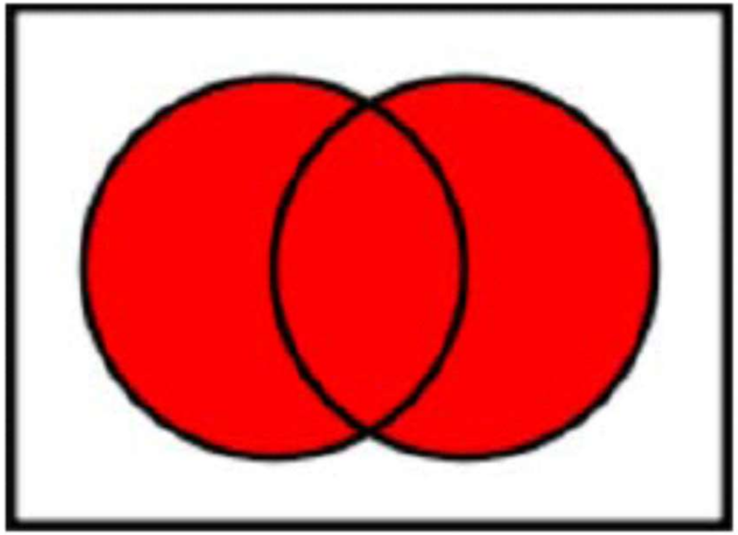
Vereinigung (Vereinigungsmenge)

- Die Vereinigungsmenge aus zwei Mengen *A* und *B* erhält man, indem man alle Elemente zusammenfasst, die in der einen oder in der anderen Menge enthalten sind (oder möglicherweise auch in beiden).

$$A \cup B := \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Wie schaut das dazugehörige Diagramm aus?

Vereinigung (Vereinigungsmenge)

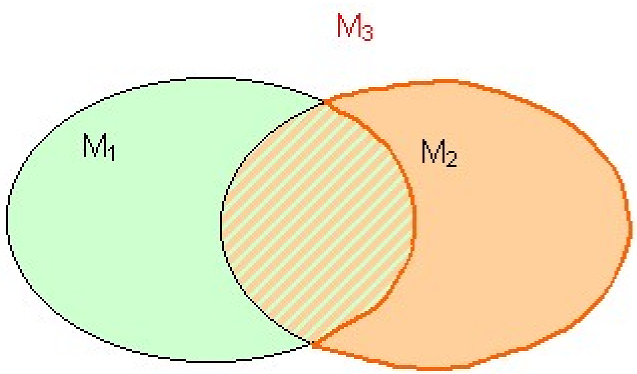


Vereinigungsmenge von
A und *B*

Differenz

- Die Differenz zweier Mengen ***M1*** und ***M2*** ist definiert als die Menge aller Elemente, die in ***M1***, nicht aber in ***M2*** enthalten sind.

$$M_3 = M1 \setminus M_2 = \{m \in M_1 \mid m \notin M_2\}$$
$$= \{m \mid m \in M_1 \wedge m \notin M_2\}$$



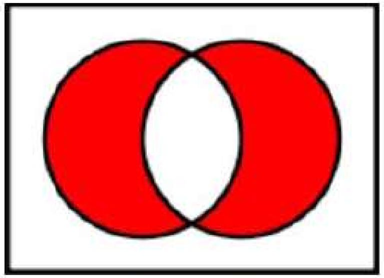
Komplement

- Ist A eine Teilmenge von B, so heißt die Differenz auch Komplement von B in A

Symmetrische Differenz

- Es handelt sich um die Menge aller Elemente, die jeweils in einer, aber nicht in beiden der beiden Mengen liegen. **(XOR)**

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$



Symmetrische Differenz: „A ohne B“ vereinigt „B ohne A“

Kartesisches Produkt

Das kartesische Produkt ***M1 x M2*** ist die Menge aller geordneten Paare ***(m1|m2)*** mit $m1 \in M1$ und $m2 \in M2$.

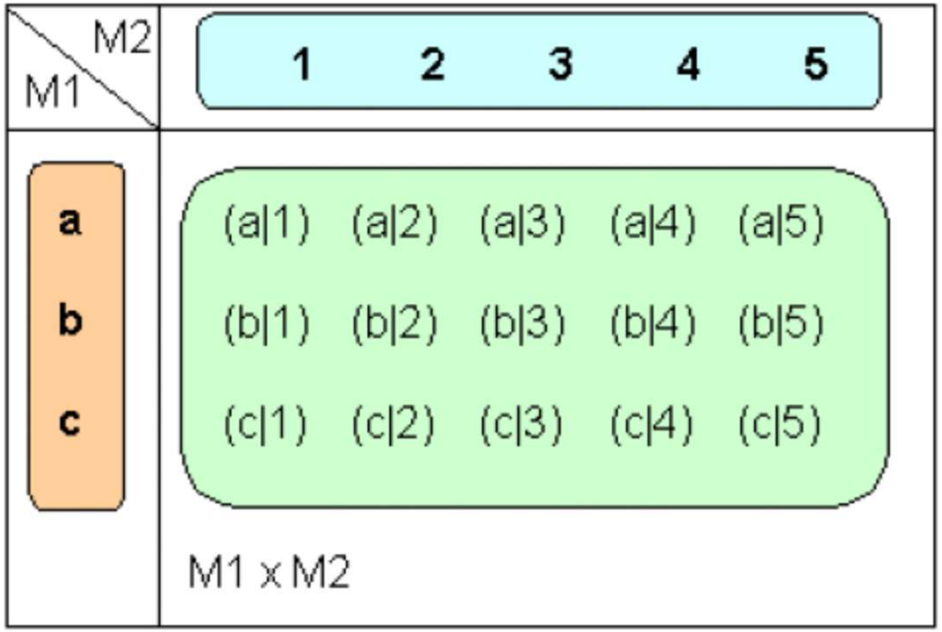
$$M1 \times M2 = \{(m1 \mid m2) \mid m1 \in M1 \wedge m2 \in M2\}$$

- Beispiel:

M1 = {a;b;c}
M2 = {1;2;3;4;5}

M1 x M2 =
{(a|1), (a|2) , (a|3) , (a|4) , (a|5)
(b|1), (b|2) , (b|3) , (b|4) , (b|5)
(c|1), (c|2) , (c|3) , (c|4) , (c|5)}

Kartesisches Produkt



- Hierbei ist die Reihenfolge entscheidend.
  (1|a) ist somit kein Element von ***M1 x M2***, während ***(a|1)*** sehr wohl ein Element von ***M1 x M2*** ist.

Potenzmenge

- Eine Potenzmenge ***P(M)*** enthält alle möglichen Teilmengen von ***M***, sowie die leere Menge.

$$P(M) = \{A \mid A \subset M\}$$

Beispiele:

M1 = {a,b}
P(M1) = {∅, {a}, {b}, {a,b}}

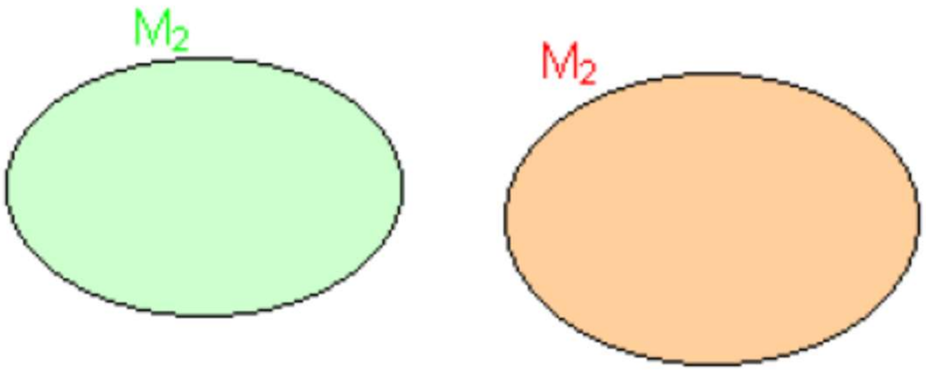
M2 = {a,b,c}
P(M2) = {∅, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

P(∅) = {∅}

Disjunkte Mengen

- Ist der Durchschnitt zweier Mengen ***M1*** und ***M2*** leer, so heißen diese Mengen disjunkt.

$$M1 \cap M2 = \{\}$$



Mächtigkeit

- Die Mächtigkeit gibt an, wie viele Elemente eine Menge enthält.
- Ist beispielsweise ***M*** eine Menge mit drei Elementen, so ist ***|M| = 3***

Relation

- Eine **Relation** ist allgemein eine Beziehung, die zwischen Dingen bestehen kann, d.h. Elemente einer Menge werden zu einem oder mehreren Elementen einer anderen (zweiten) Menge in Beziehung gesetzt.
- Eine Relation ist demnach eine Teilmenge des Kreuzprodukts der beiden Mengen.
- **Beispiel**:
- Gegeben ist die Menge A = {0,2,3,8,9} und B = {3,4,16,19} und eine Relation R zwischen A und B mit R: *ist Teiler von* = { (2,4),(2,16),(3,3),(8,16)}

Funktion

- Eine Relation R wird zur Funktion f zwischen zwei Mengen A und B, wenn jedes Element x A genau ein Element y B zum Partner hat (x|y) f.
- Eine **Funktion** drückt die Abhängigkeit einer Größe von einer anderen aus. Traditionell werden Funktionen als Regel oder Vorschrift definiert, die eine Eingangsgröße (**Argument**, meist *x*) in eine Ausgangsgröße (**Funktionswert**, meist *y*) transformiert (überführt).
- Einfache Funktion: $y = 2x + 3$

Aufgabe

- Gegeben:
  - A={3,6,9,11,12,34,46,48,91}
  - B={1,2,6,13,34,38,47,48,90}
- Gesucht:
  - Durchschnitt
  - Vereinigung
  - Differenz
  - Symmetrische Differenz
  - Kartesisches Produkt
  - Mächtigkeit
- Gegeben:
  - C={5,6,7}
  - Gesucht: Potenzmenge